

Hong Kong Mathematics Olympiad (2010 / 2011)

Final Event 1 (Group)

香港數學競賽 (2010 / 2011)

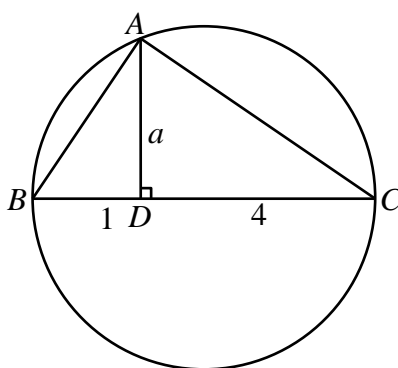
決賽項目 1 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 在圖一中， $BC$  為圓的直徑， $A$  為圓上的一點， $AB$ 、 $AC$  及  $AD$  為線段，而且  $AD$  垂直  $BC$ 。  
若  $BD = 1$ ， $DC = 4$  及  $AD = a$ ，求  $a$  的值。

In Figure 1,  $BC$  is the diameter of the circle,  $A$  is a point on the circle,  $AB$  and  $AC$  are line segments and  $AD$  is a line segment perpendicular to  $BC$ . If  $BD = 1$ ,  $DC = 4$  and  $AD = a$ , find the value of  $a$ .



圖一

Figure 1



2. 若

$$b = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{-\frac{1}{2}}}}}$$

求  $b$  的值。

If

$$b = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{-\frac{1}{2}}}}}$$

find the value of  $b$ .



3. 若  $x$ 、 $y$  及  $z$  為實數， $xyz \neq 0$ ， $2xy = 3yz = 5xz$ ，及  $c = \frac{x+3y-3z}{x+3y-6z}$ 。求  $c$  的值。

If  $x$ ,  $y$  and  $z$  are real numbers,  $xyz \neq 0$ ,  $2xy = 3yz = 5xz$ , and  $c = \frac{x+3y-3z}{x+3y-6z}$ , find the value of  $c$ .

4. 若  $x$  為一整數滿足  $\log_{\frac{1}{4}}(2x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ ，求  $x$  的最大值。

If  $x$  is an integer satisfying  $\log_{\frac{1}{4}}(2x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ , find the maximum value of  $x$ .

Hong Kong Mathematics Olympiad (2010 / 2011)

Final Event 2 (Group)

香港數學競賽 (2010 / 2011)

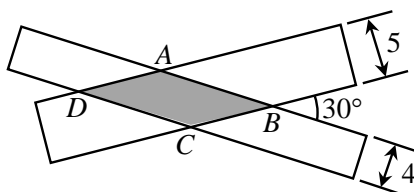
決賽項目 2 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 在圖一中, 兩闊度為 4 及 5 單位的長方形間的夾角為  $30^\circ$ 。求重疊部份的面積。

In Figure 1, two rectangles with widths 4 and 5 units cross each other at  $30^\circ$ . Find the area of the overlapped region.



圖一  
Figure 1

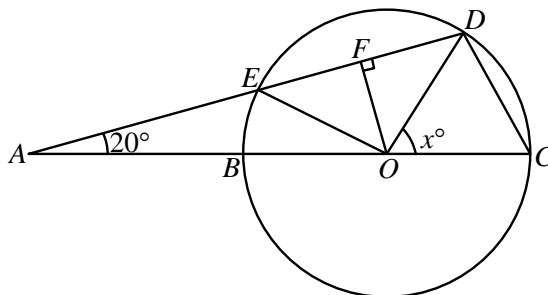
2. 從 1 到 100 選取兩數(容許重覆) 其和大於 100。問可選得多少對?

From 1 to 100, take a pair of numbers (repetitions allowed) so that their sum is greater than 100. How many ways are there to pick such pairs?

3. 在圖二中的圓，其圓心為  $O$  及半徑為  $r$ 。三角形  $ACD$  與圓相交於  $B$ 、 $C$ 、 $D$  及  $E$  點。線段  $AE$

的長度與圓的半徑相同。若  $\angle DAC = 20^\circ$  及  $\angle DOC = x^\circ$ ，求  $x$  的值。

In Figure 2, there is a circle with centre  $O$  and radius  $r$ . Triangle  $ACD$  intersects the circle at  $B$ ,  $C$ ,  $D$  and  $E$ . Line segment  $AE$  has the same length as the radius. If  $\angle DAC = 20^\circ$  and  $\angle DOC = x^\circ$ , find the value of  $x$ .



圖二

Figure 2



4. 已知  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0$  及  $\frac{1}{x} - \frac{6}{y} - \frac{5}{z} = 0$ 。

若  $P = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ ，求  $P$  的值。

Given that  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0$  and  $\frac{1}{x} - \frac{6}{y} - \frac{5}{z} = 0$ .

If  $P = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ , find the value of  $P$ .



Hong Kong Mathematics Olympiad (2010 / 2011)

Final Event 3 (Group)

香港數學競賽 (2010 / 2011)

決賽項目 3 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若  $a$  為一整數及  $a^2 + 100a$  為一質數，求  $a$  的最大值。

If  $a$  is an integer and  $a^2 + 100a$  is a prime number, find the maximum value of  $a$ .

2. 設  $a$ 、 $b$  及  $c$  為實數。若 1 為  $x^2 + ax + 2 = 0$  的根及  $a$  和  $b$  為  $x^2 + 5x + c = 0$  的根，求  $a + b + c$  的值。

Let  $a$ ,  $b$  and  $c$  be real numbers. If 1 is a root of  $x^2 + ax + 2 = 0$ , and  $a$  and  $b$  are roots of  $x^2 + 5x + c = 0$ , find the value of  $a + b + c$ .

3. 設  $x$  及  $y$  為正實數且  $x < y$ 。若  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  及  $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3}$ ，求  $y - x$  的值。

Let  $x$  and  $y$  be positive real number with  $x < y$ . If  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  and  $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3}$ , find the value of  $y - x$ .

4. 把數字 1, 2, ..., 10 分成兩組並設  $P_1$  及  $P_2$  分別為該兩組數的乘積。若  $P_1$  為  $P_2$  的倍數，

求  $\frac{P_1}{P_2}$  的最小值。

Split the numbers  $1, 2, 3, \dots, 10$  into two groups and let  $P_1$  be the product of the first group and  $P_2$  the product of the second group. If  $P_1$  is a multiple of  $P_2$ , find the minimum value of  $\frac{P_1}{P_2}$ .

Hong Kong Mathematics Olympiad (2010 / 2011)

Final Event 4 (Group)

香港數學競賽 (2010 / 2011)

決賽項目 4 (團體)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若  $P = 2\sqrt[4]{2007 \cdot 2009 \cdot 2011 \cdot 2013 + 10 \cdot 2010 \cdot 2010 - 9} - 4000$ ，求  $P$  的值。

If  $P = 2\sqrt[4]{2007 \cdot 2009 \cdot 2011 \cdot 2013 + 10 \cdot 2010 \cdot 2010 - 9} - 4000$ , find the value of  $P$ .

2. 若  $9x^2 + nx + 1$  及  $4y^2 + 12y + m$  為平方數及  $n > 0$ ，求  $\frac{n}{m}$  的值。

If  $9x^2 + nx + 1$  and  $4y^2 + 12y + m$  are squares with  $n > 0$ , find the value of  $\frac{n}{m}$ .

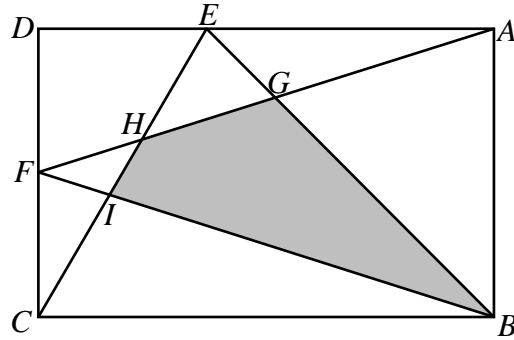
3. 設  $n$  及  $\frac{47}{5}\left(\frac{4}{47} + \frac{n}{141}\right)$  為正整數。若  $r$  為  $n$  被 15 除的餘數，求  $r$  的值。

Let  $n$  and  $\frac{47}{5}\left(\frac{4}{47} + \frac{n}{141}\right)$  be positive integers. If  $r$  is the remainder of  $n$  divided by 15, find the value of  $r$ .

4. 在圖一中， $ABCD$  為一長方形，及  $E$  及  $F$  分別為線段  $AD$  及  $DC$  上的點。點  $G$  為線段  $AF$  及

$BE$  的交點，點  $H$  為線段  $AF$  及  $CE$  的交點，點  $I$  為線段  $BF$  及  $CE$  的交點。若  $AGE$ ， $DEHF$  及  $CIF$  的面積分別為 2，3 及 1，求灰色部份  $BGHI$  的面積。

In figure 1,  $ABCD$  is a rectangle, and  $E$  and  $F$  are points on  $AD$  and  $DC$  respectively. Also,  $G$  is the intersection of  $AF$  and  $BE$ ,  $H$  is the intersection of  $AF$  and  $CE$ , and  $I$  is the intersection of  $BF$  and  $CE$ . If the areas of  $AGE$ ,  $DEHF$  and  $CIF$  are 2, 3 and 1 respectively, find the area of the gray region  $BGHI$ .



圖一

Figure 1

